

# Beweis- und Argumentationsaufgaben in eKlausuren

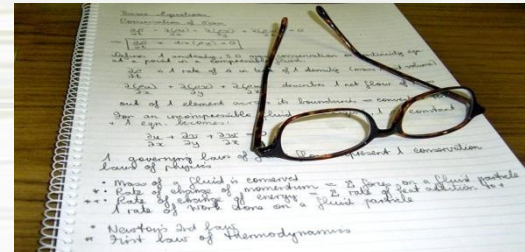
Ingo Dahn und Engelbert Niehaus  
Universität Koblenz-Landau

Bsp.:

①  $a, b \in \mathbb{R} \quad a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

Bew.: Ann.:  $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow \text{ex. } a^{-1}, b^{-1}$

$$0 = a \cdot b \Rightarrow 0 = (ab)b^{-1}a^{-1}$$
$$= a(bb^{-1})a^{-1} = \frac{a \cdot 1}{1} a^{-1}$$
$$0 = 1 \quad \downarrow$$



# Hinweis

Die Präsentation wurde am 11.6.2013 bei den 11. Koblenzer eLearning-Tagen vorgestellt.

Der 2. Autor konnte an der Präsentation leider nicht teilnehmen - die Verantwortung für alle Fehler liegt beim 1. Autor.

Die Möglichkeiten von Theorembeweisern zur Kontrolle von Beweisen sind bekannt. Sie wurden hier nicht berücksichtigt, da ihre Bedienung Spezialkenntnisse erfordert die in Klausuren nicht vorausgesetzt werden können.

# Was kommt?

- Was sind Beweis/Argumentationsaufgaben?
  - Wo sind sie wichtig? Warum?
- Die eKlausur *Funktionalanalysis* in Landau
- Welche Probleme sind zu lösen?
- Wie kann man Beweise in eKlausuren besser unterstützen?

# Beweisaufgaben?

- Begründen Sie..., Beweisen Sie...
- Nicht: Lösen Sie..., Vereinfachen Sie...
- In der Mathematik/Mathematik-Lehrerausbildung wichtig, in der Schule kaum geübt
- Nicht so wichtig in der angewandten Mathematik
- Wichtig in nicht-mathematischen Fächern
- These: Beweisaufgaben kann man nicht automatisch korrigieren

# Beweisaufgaben...

- ... erziehen zu exaktem Denken
- ... erziehen zu strukturiertem Denken
- ... erziehen zu (selbst)kritischem Denken
- ... sind aufwendig zu korrigieren
- ... sind prototypisch für Argumentationen in anderen Fächern

# Die Mathe-eKlausur in Landau

- Anforderung:
  - Beweisaufgaben (Funktionalanalysis)
  - Mit ILIAS-EA
  - Automatisch korrigiert
  - 24 Teilnehmer
- Lösung in Aktion

# Klausurergebnis

- 4 Aufgaben von einfach (A1) zu schwer (A4)
- **A1, A2, A3** elektronisch - **A4 Papier & Bleistift**

Aufgabe	A1	A2	A3	A4
%-Mittelwert	98,41%	95,00%	40,91%	29,09%

- Alle Aufgabenteile wurden zu 90% auf Papier bearbeitet (Fragmentliste auf Aufgabenblatt)
- Bei **Papier&Bleistift-Aufgabe** erhält der e-Klausurteilnehmer kein Gerüst aus Fragmenten.

# Meinungen der Teilnehmer

Geben Sie bitte eine kurze Rückmeldung, wie Sie mit dieser Klausurform, sowie den darin enthaltenen Aufgaben, zurechtkamen.

1. Traten während des Bearbeitens Probleme auf?
2. Welche Vor-/Nachteile sehen Sie bei der Durchführung dieser Klausurform?
3. Haben Sie Anregungen oder Verbesserungsvorschläge?

1. Bei mir traten bis jetzt keine Probleme auf :)

2. Vorteil von Beweispuzzeln ist, dass man keine zentrale Beweisidee "selbst" finden muss, was den Nachteil hätte, dass man in der Aufregung nicht darauf kommt und somit nicht zeigen kann, was man weiß, oder unter anderen Umständen leisten könnte.

Die Beweispuzzle ermöglichen es weiterhin, dass man die Teile genauer auf ihre Definition hin untersucht, und somit tiefer in die Materie gelangt.

3. Anregung: vor den Teilen auf der ausgedruckten Version standen Buchstaben. Zur besseren Orientierung wäre es auch gut, wenn diese auch vor den Teilen am PC ständen, damit man nicht ausversehen ein falsches Teilstück verschiebt und man außerdem die gesuchten Teile schneller identifizieren und finden kann.



# Meinungen der Teilnehmer

Probleme während der Klausur traten keine auf. Die Organisation vorher machte mich jedoch leicht nervös, was aber zum Glück danach etwas verflogen ist. Vorteile sehe ich darin, dass man Beweisideen besser nachvollziehen kann und wenn einem ein oder zwei Schritte fehlen, man sie sich durch die vorgegebenen Bausteine erschließen kann. Auch liefert diese Form immer einen Ansatz des Beweises, was meist die größte Hürde darstellt. Somit finde ich diese Form für das Verstehen von Beweisen sehr sinnvoll. Sonst ist man immer hingegangen und hat Beweise auswendig gelernt ohne sie wirklich verstanden zu haben. Nachteile sehe ich einfach in der Bearbeitung. Man bearbeitet es trotzdem auf Papier und nicht direkt an dem PC. Was für die Studierende eigentlich doppelter Aufwand ist. Vielleicht könnte man daran ansetzen, die Aufgaben so aufzubauen, dass man sie direkt an dem PC bearbeiten kann.



# Meinungen der Teilnehmer

1. Nein, ich hatte während der Bearbeitung keine Probleme.
2. Vorteil: Bausteine erleichtern die Beweisführung.  
Nachteil: Wenn ein Zwischenschritt fehlt, kann das sehr störend sein.
3. Ich würde diese Klausurform beibehalten.

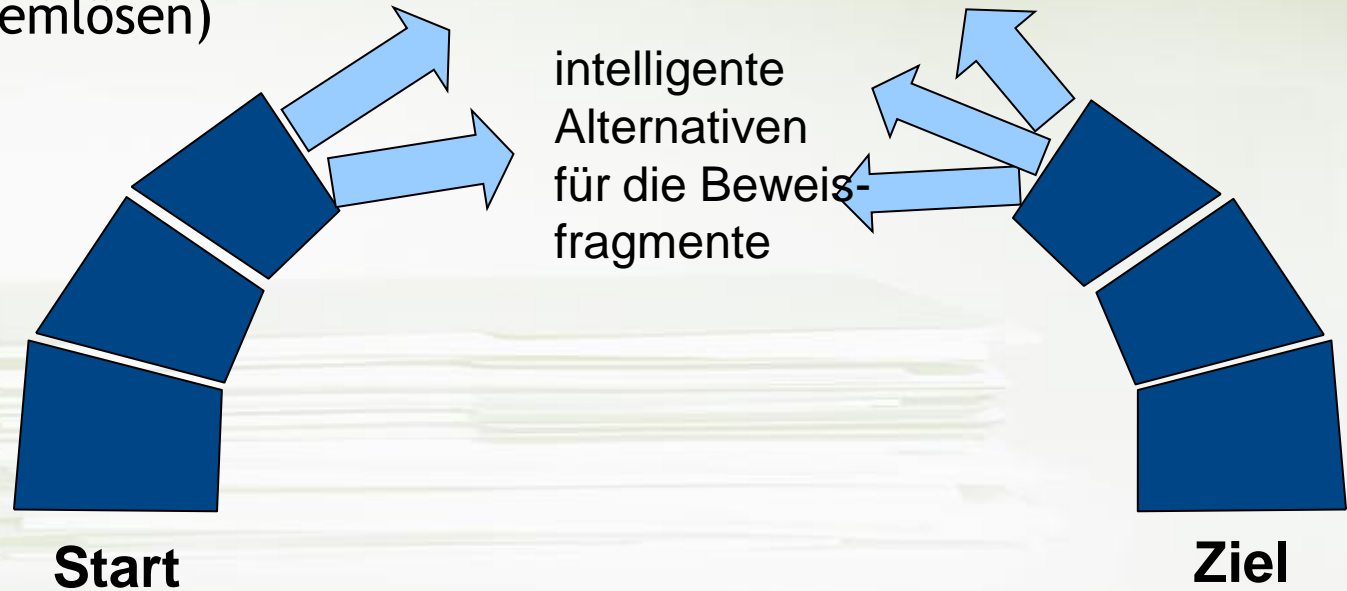


# Hilfen & Komplexität

- **Anzahl der notwendigen Beweisfragmente:**  
Bei den Aufgaben wurde angegeben, wie viele Beweisfragmente für den Beweis notwendig sind (Angaben könnten entfallen).
- **Anzahl der intelligente Falschanworten**  
sowohl für das Vorwärtsarbeiten als auch für das Rückwärtsarbeiten erhöhen.

# Arbeitsrichtungen

- Interpolationsbeweise:  
Vorwärts- & Rückwärtsarbeiten  
(Stein, Problemlösen)



# Methode: Lückentext

Vervollständige den folgenden Beweis der Gleichung  $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ .

*Hinweis: Verwende die folgenden Zeichen um Formeln einzugeben.*

## Symbol Eingabe

∈ in  
∪ uu  
∩ nn

Wir zeigen zunächst

1.    $\subseteq (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$  und dann
2.    $\subseteq$   .

Sei  $x \in$    beliebig gewählt. Dann ist  $x \in X$  und  $x \in$   . Wir nehmen an, dass  $x \in Y$  ist. Der Fall   wird dann analog behandelt.

Da  $x \in X$  und   ist, ist   und damit erst recht  $x \in$   . Damit ist (1.) bewiesen.

Sei umgekehrt  $x \in$    beliebig gewählt, etwa    $\cap Y$ . Der Fall   wird analog behandelt. Damit ist nun sowohl  $x \in X$  als auch  , also erst recht   und damit  , was (2.) und damit die Behauptung beweist.

# Methode: Zuordnungsaufgabe

Für alle Teilmengen  $N \subseteq M$  sei  $C(N)$  das relative Komplement von  $N$  bezüglich  $M$ .

Bestimmen Sie die richtige Reihenfolge der Zeilen des Beweises der Aussage

*Für alle Mengen  $X, Y \subseteq M$  gilt:  $C(X \cup Y) \subseteq C(X) \cap C(Y)$ .*

-	▼	(1)
-	▲	(2)
Sei $x \in C(X \cup Y)$ [ $x \in C(X \cup Y)$ ].	≡	(3)
Deshalb ist $C(X \cup Y) \subseteq C(X) \cap C(Y)$ [ $C(X \cup Y) \subseteq C(X) \cap C(Y)$ ]	▼	(4)
Dann ist $x$ sowohl in $C(X)$ als auch in $C(Y)$	▼	(5)
Dann ist $x \in C(X) \cap C(Y)$ [ $x \in C(X) \cap C(Y)$ ]	▼	(6)
Dann ist $x$ weder in $X$ noch in $Y$		
Dann ist $x \in M$ [ $x \in M$ ] aber nicht in $X \cup Y$ [ $X \cup Y$ ]		
-	▼	
-	▼	

Hilfe erhalten: [Read](#)

Antwort 1: Wählen Sie den Eintrag aus dem Ausklappenmenü aus, der zum angezeigten Eintrag passt

# Beweise haben viele Varianten

- Zeigen Sie, dass B aus A folgt.
  - *Wir setzen A voraus, dann gilt offenbar B*
  - *A, dann C, dann D, dann C, dann D, dann B*

Die Zahl der praktisch vorkommenden korrekten Varianten ist begrenzt, aber möglicherweise sehr groß  
Konsequenz: Varianten können nicht alle aufgezählt werden

Varianten die nicht als korrekt erkannt werden können dennoch korrekt sein

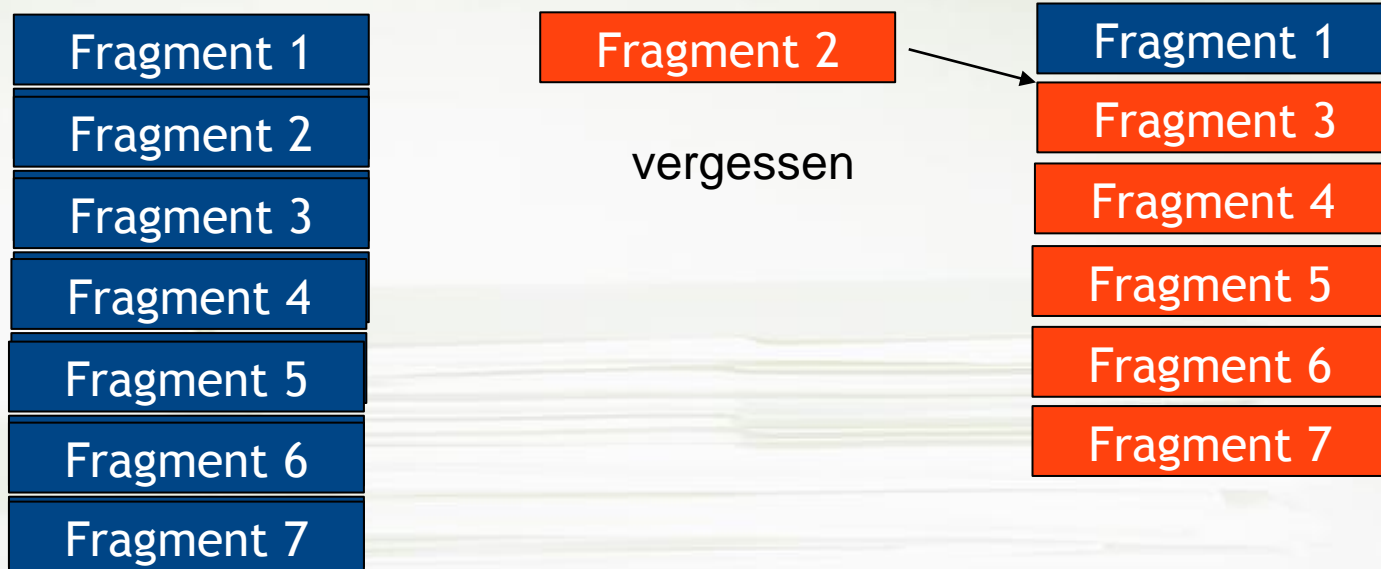
# Begrenzung der Variationen

- Formulierung der Aufgabenstellung
- Beschränkung der möglichen Eingaben
- Feste Vorgabe von Teilen die variiert werden könnten
- Mehrere korrekte Lösungen vorsehen
- Je mehr vorgegeben wird, desto einfacher wird die Aufgabe!



# Automatische Bewertung der e-Klausur

- Bewertungen erwarten in der aktuellen Form ein bestimmtes Beweisfragment an genau einer Stelle im Beweis.



# Einfacher Beweis

- (1)
- (2) wegen (1)
- (3) wegen (2)
- (4) wegen (3)
- ...
- (Behauptung)

*Jede Aussage hängt von der vorherigen ab*  
Eindeutige Lösung

# Tiefer Beweis

- (1)
- (2) wegen (1)
- (3) wegen (2)
- (4) wegen (1,3)
- ...
- (Behauptung)

*Jede Aussage hängt von der vorherigen und möglicherweise weiteren Aussagen ab*

Eindeutige Lösung

# Hybridklausur

- Arbeit mit Formeln auf Papier/mit Word
- Übertragen der Ergebnisse in die eKlausur
- Beweiscode in Textlücke wenn nur wenige Lösungen möglich sind

Beispiel

# Verzweigter Beweis

(B)	(H)
(G) wegen (B)	(C) wegen (H)
(A) wegen (G)	(D) wegen (C)
(I) wegen (A)	(J) wegen (D)

(F) wegen (I) und (J)

(E) wegen (F)

...

(Behauptung)

(I),(J)  $\rightarrow$  (F)

Mehrere Lösungen - mischbar

**BGAIHCDJFE; HCDJBGAIFE**

# Zu viele Lösungen?

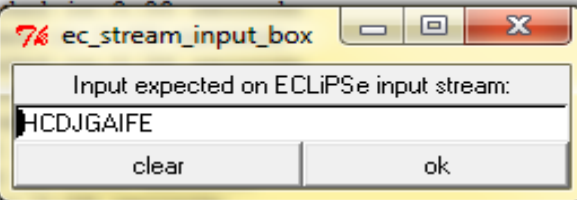
- a) Lösungen nicht aufzählen, sondern beschreiben:

Voraussetzungen ((I),(J)) müssen vor Folgerung (F) kommen.

Test mit externem Programm möglich  
Programm kann Fehler erkennen

# Zu viele Lösungen?

```
compiler_peekhole.eco loaded in 0.00 seconds
compiler_codegen.eco loaded in 0.00 seconds
compiler_varclass.eco loaded in 0.00 seconds
compiler_indexing.eco loaded in 0.00 seconds
compiler_regassign.eco loaded in 0.00 seconds
asm.eco loaded in 0.02 seconds
module_options.eco loaded in 0.00 seconds
ecl_compiler.eco loaded in 0.05 seconds
//X/Aktuelles/Mathe/proofTest.pl compiled 3632 bytes in 0.00 seconds
calling an undefined procedure proofcheck in module eclipse
Beweis [B, G, A, I, H, C, D, J, F, E] OK
Beweis [H, C, D, J, B, G, A, I, F, E] OK
Beweis FALSCH: G folgt nicht unmittelbar aus [H, C, D, J].
```



# Zu viele Lösungen?

## b) Abhängigkeiten erkennen

Geben Sie zu jeder Formel in der ersten Spalte an, von welchen anderen Formeln sie abhängt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
D	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
E	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
G	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
J	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

A-G  
B  
C-H  
D-C  
E-F  
F-I,J  
G-B  
H  
I-A  
J-D



# Ein Eingabewerkzeug

## Beweisschritte

## Beweis

label	content	myreasons
A	Argument 1	G
B	Argument 2	
C	Argument 3	H
D	Argument 4	C
E	Argument 5	F
F	Argument 6	IJ
G	Argument 7	B
H	Argument 8	
I	Argument 9	A
J	Argument 10	D

Argument 2	wegen	<a href="#">reason hinzufügen</a>
Argument 7	wegen	Argument 2
Argument 1	wegen	Argument 7
Argument 9	wegen	Argument 1
Argument 8	wegen	<a href="#">reason hinzufügen</a>
Argument 3	wegen	Argument 8
Argument 4	wegen	Argument 3
Argument 10	wegen	Argument 4
Argument 6	wegen	Argument 9
Argument 5	wegen	Argument 6

Argument 10

B G A I H C D J F E

## Abhängigkeiten

A-G, B-, C-H, D-C, E-F, F-IJ, G-B, H-, I-A, J-D,

# Differenzierte Bewertung?

- Richtige Begründungen geben Punkte
  - Auch wenn nicht der ganze Beweis richtig ist
  - Punkte := Richtige - Falsche + 0,5\*Unvollständige
- Einzelschritte (die der Lernende eingibt!) bewerten ODER
- Komplexere Auswertungen unterstützen

# Implementierung in IMathAS

- Text einer Aufgabe kann vorherige Antwort einbeziehen
- Verarbeitung der Antwort und Berechnung der Punktezahl können programmiert werden



**Satz:** Beweisen Sie die Aussage

Gegeben Sie die folgenden Voraussetzungen für den Beweis:

- Gegebene Voraussetzung 0
- Gegebene Voraussetzung 1
- Gegebene Voraussetzung 2
- Gegebene Voraussetzung 3
- Gegebene Voraussetzung 4
- Gegebene Voraussetzung 5

Zeigen Sie nun, dass die folgenden Aussagen gelten:

- Zu zeigende Behauptung 0
- Zu zeigende Behauptung 1
- Zu zeigende Behauptung 2

**VORAUSSETZUNGEN für Beweisschritt 1:** Wählen Sie alle notwendigen Voraussetzungen für den unten von Ihnen gewählten Beweisschritt aus.

- Gegebene Voraussetzung 0
- Gegebene Voraussetzung 1
- Gegebene Voraussetzung 2
- Gegebene Voraussetzung 3
- Gegebene Voraussetzung 4
- Gegebene Voraussetzung 5

**FOLGERUNGEN für Beweisschritt 1:** Wählen Sie genau eine Folgerung für diesen Beweisschritt aus, den Sie mit den obigen Voraussetzungen ableiten können.

- Zwischenschritt im Beweis 0
- Zwischenschritt im Beweis 1
- Zwischenschritt im Beweis 2
- Zwischenschritt im Beweis 3

**Satz:** Beweisen Sie die Aussage

Gegeben Sie die folgenden Voraussetzungen für den Beweis:

- Gegebene Voraussetzung 0
- Gegebene Voraussetzung 1
- Gegebene Voraussetzung 2
- Gegebene Voraussetzung 3
- Gegebene Voraussetzung 4
- Gegebene Voraussetzung 5

Zeigen Sie nun, dass die folgenden Aussagen gelten:

- Zu zeigende Behauptung 0
- Zu zeigende Behauptung 1
- Zu zeigende Behauptung 2

**Bisheriger Beweis:**

- Aus den Voraussetzungen des Satzes folgt
- Zwischenschritt im Beweis 1

**VORAUSSETZUNGEN für Beweisschritt 2:** Wählen Sie alle notwendigen Voraussetzungen für den unten von Ihnen gewählten Beweisschritt aus.

- Gegebene Voraussetzung 0
- Gegebene Voraussetzung 1
- Gegebene Voraussetzung 2
- Gegebene Voraussetzung 3
- Gegebene Voraussetzung 4
- Gegebene Voraussetzung 5
- Zwischenschritt im Beweis 1

**FOLGERUNGEN für Beweisschritt 2:** Wählen Sie genau eine Folgerung für diesen Beweisschritt aus, den Sie mit den obigen Voraussetzungen ableiten können.

- Zwischenschritt im Beweis 0
- Zwischenschritt im Beweis 1 (VERWENDET)
- Zwischenschritt im Beweis 2
- Zwischenschritt im Beweis 3
- Zu zeigende Behauptung 0
- Zu zeigende Behauptung 1

# Fazit

- Anspruchsvolle Beweisaufgaben mit automatischer Korrektur sind möglich
- Es ist mitunter schwierig, alle richtigen Lösungen vorauszusehen
- Werkzeuge zur Unterstützung von Eingabe und Auswertung sind möglich
- Papier ist als Hilfsmittel wichtig